本文提出了一种将水面波模拟为二维域中的位移场的方法。我们的方法依赖于携带水波能量包的拉格朗日粒子。每个数据包都携带有关整个波列的信息，而不是单个波峰。我们的方法是无条件稳定的，可以模拟高分辨率几何细节。该方法还提供了用于艺术控制的简单界面，因为它本质上是一个具有直观参数（如波长和幅度）的粒子系统。我们的实现可以很好地并行化，并且可以在中等配置情况下实时运行。

1 介绍

水波运动由两相不可压缩的Navier-Stokes方程很好地建模。这些方程的一般形式对于详细的水面几何形状在分析和计算上都是棘手的，因此研究人员传统上采用小幅度假设，该假设有效地线性化了问题并将波限制在二维域内定义的高度场中。此版本的水波问题允许使用正弦波解，其速度取决于其波长和水深。但是，尽管通过小幅度假设大大简化了该问题，但该问题仍然太复杂而无法解析地解决。

计算机图形学的研究已经以多种方式解决了线性化水波问题。通过强制执行其他假设，例如浅水[Kass and Miller 1990]，无限深度[Mastin等人1987；Tessendorf 2004b]，省略实心边界，或采用静态实心边界[Fournier and Reeves 1986; Jeschke和Wojtan，2015]。其他方法使用数值技术来求解偏微分方程，以便对水面波动力学进行时间步长[Canabal等人2016; Tessendorf 2004a]。 这些方法可以处理更一般的情况，但它们会带来与稳定性，节能，空间分辨率和艺术控制有关的重要问题。最后，一些方法将波本身近似为拉格朗日粒子[Yuksel等人 2007]

这种方法具有处理边界几何形状非常普遍的情况的潜力，但与完全分散的水波方程相反，它产生的解决方案更接近于等速波动方程。

我们的目标是利用拉格朗日波粒子的潜力，但以合理模拟水波扩散的方式。而不是将每个粒子与单个波峰相关联，我们将每个粒子与由整个波长和波谱组成的波能数据包相关联。 然后，我们描述此波包如何运动和变形以近似线性化水面波的行为。

本文做出了以下贡献：

波包(Wave Packets)：我们将波包的概念引入计算机图形学，并描述其在色散水波中的动力学。

视觉细节：我们的方法通过展现更多的视觉细节（以每个计算自由度的波峰来衡量），并结合了文献中的定性波行为（如色散，衍射，折射，反射，耗散），对以前的拉格朗日粒子方法进行了改进。

高效计算：该方法是无条件稳定的，不需要人工阻尼，独立于网格或空间分辨率参数，并且固有地是并行的。

新颖的控制参数：我们引入了新的机制，使艺术家可以直接控制波谱和计算复杂性，从而在视觉细节和计算速度之间进行了直接权衡。

2相关工作

2.1 至少从1980年起，水面波动画就引起了计算机图形学研究人员的关注[Schachter 1980]。如引言中所述，此后的主要策略是对Navier-Stokes方程采用多种假设，以便以正弦波的形式表达海洋的运动[Hinsinger等人2002； Mastin等人1987； Tessendorf 2004b]。 尽管这些假设牺牲了模拟任意流体运动的能力，但它们导致了极其高效的计算方法。随后的工作用更有趣的边界条件，飞溅，喷雾和碎波增强了这些简单的模型[Fournier and Reeves 1986; Gonzato和LeSaëc，1997； O’Brien and Hodgins 1995； 佩奇1986; Thuerey等人 2007a，b； Ts’o and Barsky 1987]。Darles等人的出色调查。[2011]更详细地介绍了该海洋模拟文献

在过去的十年中出现了几种新颖的水面波模拟方法。Jeschke和Wojtan [2015]推广了上述分析方法来处理复杂边界，同时尊重诸如色散和衍射之类的波行为。 但是，他们的方法需要预先计算并且不能解决移动边界。为了代替使用解析傅里叶解决方案，其他研究人员探索了二维欧拉模拟[Tessendorf 2004a]。随后的研究扩展了该方法，解决了随着时间推移而累积的数值误差[Tessendorf 2014]，并更准确地捕获了色散效应[Canabal等人2016]。 仅边界方法也显示出有效模拟更多一般海浪行为的希望，尽管它们目前需要更多数量级的计算[Da等人2016; Keeler and Bridson 2014]。

Yuksel等人 [2007]的“波粒”方法与我们最相似。它用自己的一组粒子表示每个波峰，允许波反射以及与动态对象的相互作用。算法实现，并行化和控制也很简单。但是，在模拟长波列或高频波时，每波峰一个粒子的方法可能会很昂贵同样，此方法很难模拟波色散，因为它为问题增加了新的维度（每个波峰和每个波长一个粒子）。该方法还令人难以置信地以相速度而不是群速度传输波能量。最后，尽管随后的论文[Yuksel 2010]为如何将方法扩展到这些目标提供了有用的见识，但该方法并未解决如何处理诸如折射，衍射，色散或非平面边界反射的波效应。波粒方法激发了有关背景跟踪的后续工作[Cords 2008]，该方法的可控制性和速度使其成为模拟视频游戏中水的极佳选择[Gonzalez-Ochoa 2016]。

然而，人们选择模拟地表水波，其结果可用于许多不同的应用中。以前的研究人员已经将波浪用作边界条件或导向形状[Nielsen and Bridson 2011; SideFX 2013]或作为基于物理的程序纹理的一种类型[Chentanez和Müller2010]。波浪模拟参数也可以调整以获得理想的外观[Horvath 2015; Nielsen等人2013]。研究人员还将水面波模拟与完全三维模拟相结合[Kim等人2013; Mercier等人2015; Thuerey等人2010; 杨等人2016; Yu等人2012]。 我们在图2中展示了我们的方法如何增强一些现有的2D模拟。

2.2 物理文献

尽管拉格朗日波包对计算机图形学而言是新颖的，但将拉格朗日波包视为基本单元的想法在理论物理学中具有悠久的历史。它似乎起源于20世纪初期的理论量子力学研究的爆炸式增长。在这种情况下，波来自薛定谔方程[Birkhoff 1927]。由于波包的数学推导适用于任何色散方程，因此海洋学家从那时起就使用波包理论来解释水波能量的传输[Pedlosky 2013]。有人甚至提出将水波包命名为“hydron”，并赋予它与物理学中其他基本粒子（如光子和电子）相同的地位[Synge 1962]。尽管从理论上说，将水浪作为包是有用的，但据我们所知，我们还是第一种将波包用作数值模拟的基本方法的方法。

3 波动理论

3.1 艾里波动理论

艾里波动理论[Airy1841]将水面描述为随时间变化的高度函数。 我们可以使用此框架分析一组波的传播方式，然后使用这些理论结果来开发一种计算效率高的方法来模拟水面波。我们将首先分析一维情况，然后将其扩展到覆盖二维水面。

如果我们研究水面高度场的傅立叶变换，我们可以将水面视为多个不同波长的波的积分之和：

其中是波数, 与波长的关系为; 是空间坐标;为水深; 是角频率,与周期的关系为; 是每一个波的振幅; 是时间. 角频率具有特殊形式，可赋予水波独特性质：

其中是重力，是水面张力，是水密度.频率与波数之间的关系被称为*色散关系*(dispersion relation).从该关系中, 我们可以将公式的参数重构为,其中

是给定波长的传播速度,一般称为相速度(phase velocity).在2D空间中,波长为的水波在面积为A的水面上的能量是

波能以群速度(group velocity)运动,定义为

并且更多的讨论在附录A. 在一维度空间,和是标量.在二维空间，它们是向量和,并且我们使用标量作为波向量大小的简写.

直觉 如果考虑它们的极限行为，我们可以从本节的方程中提取一些良好的直觉。对于深水()中的重力波()，较长的波比较短的波传播得更快.我们倾向于在飞溅的外边缘看到长波，而短波则滞后.此外，相速度等于群速度的两倍，因此波峰实际上超出了其能量，并产生了波峰在飞溅的外边缘消失的效果.在中等水深处，随着深度的减小而减慢，而加快，直到它们最终在浅水()中变得相等时，所有波长以恒定速度传播.

对于毛细波()，几乎只发生在深水/高波数模式1中，短波长的传播比长波长的传播快.因此，以表面张力为主的小飞溅物在外边缘的波长较短.相速度仅是群速度的三分之二，因此能量超过波峰，从而在飞溅的外边缘产生了波化的波效果.所有这些定性作用都可以在我们的结果中看到.

3.2 波包(Wave packets)

在本文中，而不是使用无限长的波列进行计算[Mastin等人1987]或单波峰[Yuksel等人2007]，我们想传播局部波包.每个波包将代表相似波长的集合，并且它将覆盖比单个波峰更大的空间区域.这种策略将使我们能够用单个计算元素同时表示长波列，使波与动态变化的环境相互作用，并服从艾里波理论描述的定性行为.