本文提出了一种将水面波模拟为二维域中的位移场的方法。我们的方法依赖于携带水波能量包的拉格朗日粒子。每个数据包都携带有关整个波列的信息，而不是单个波峰。我们的方法是无条件稳定的，可以模拟高分辨率几何细节。该方法还提供了用于艺术控制的简单界面，因为它本质上是一个具有直观参数（如波长和幅度）的粒子系统。我们的实现可以很好地并行化，并且可以在中等配置情况下实时运行。

1 介绍

水波运动由两相不可压缩的Navier-Stokes方程很好地建模。这些方程的一般形式对于详细的水面几何形状在分析和计算上都是棘手的，因此研究人员传统上采用小幅度假设，该假设有效地线性化了问题并将波限制在二维域内定义的高度场中。此版本的水波问题允许使用正弦波解，其速度取决于其波长和水深。但是，尽管通过小幅度假设大大简化了该问题，但该问题仍然太复杂而无法解析地解决。

计算机图形学的研究已经以多种方式解决了线性化水波问题。通过强制执行其他假设，例如浅水[Kass and Miller 1990]，无限深度[Mastin等人1987；Tessendorf 2004b]，省略实心边界，或采用静态实心边界[Fournier and Reeves 1986; Jeschke和Wojtan，2015]。其他方法使用数值技术来求解偏微分方程，以便对水面波动力学进行时间步长[Canabal等人2016; Tessendorf 2004a]。 这些方法可以处理更一般的情况，但它们会带来与稳定性，节能，空间分辨率和艺术控制有关的重要问题。最后，一些方法将波本身近似为拉格朗日粒子[Yuksel等人 2007]

这种方法具有处理边界几何形状非常普遍的情况的潜力，但与完全分散的水波方程相反，它产生的解决方案更接近于等速波动方程。

我们的目标是利用拉格朗日波粒子的潜力，但以合理模拟水波扩散的方式。而不是将每个粒子与单个波峰相关联，我们将每个粒子与由整个波长和波谱组成的波能数据包相关联。 然后，我们描述此波包如何运动和变形以近似线性化水面波的行为。

本文做出了以下贡献：

波包(Wave Packets)：我们将波包的概念引入计算机图形学，并描述其在色散水波中的动力学。

视觉细节：我们的方法通过展现更多的视觉细节（以每个计算自由度的波峰来衡量），并结合了文献中的定性波行为（如色散，衍射，折射，反射，耗散），对以前的拉格朗日粒子方法进行了改进。

高效计算：该方法是无条件稳定的，不需要人工阻尼，独立于网格或空间分辨率参数，并且固有地是并行的。

新颖的控制参数：我们引入了新的机制，使艺术家可以直接控制波谱和计算复杂性，从而在视觉细节和计算速度之间进行了直接权衡。

2相关工作

2.1 至少从1980年起，水面波动画就引起了计算机图形学研究人员的关注[Schachter 1980]。如引言中所述，此后的主要策略是对Navier-Stokes方程采用多种假设，以便以正弦波的形式表达海洋的运动[Hinsinger等人2002； Mastin等人1987； Tessendorf 2004b]。 尽管这些假设牺牲了模拟任意流体运动的能力，但它们导致了极其高效的计算方法。随后的工作用更有趣的边界条件，飞溅，喷雾和碎波增强了这些简单的模型[Fournier and Reeves 1986; Gonzato和LeSaëc，1997； O’Brien and Hodgins 1995； 佩奇1986; Thuerey等人 2007a，b； Ts’o and Barsky 1987]。Darles等人的出色调查。[2011]更详细地介绍了该海洋模拟文献

在过去的十年中出现了几种新颖的水面波模拟方法。Jeschke和Wojtan [2015]推广了上述分析方法来处理复杂边界，同时尊重诸如色散和衍射之类的波行为。 但是，他们的方法需要预先计算并且不能解决移动边界。为了代替使用解析傅里叶解决方案，其他研究人员探索了二维欧拉模拟[Tessendorf 2004a]。随后的研究扩展了该方法，解决了随着时间推移而累积的数值误差[Tessendorf 2014]，并更准确地捕获了色散效应[Canabal等人2016]。 仅边界方法也显示出有效模拟更多一般海浪行为的希望，尽管它们目前需要更多数量级的计算[Da等人2016; Keeler and Bridson 2014]。

Yuksel等人 [2007]的“波粒”方法与我们最相似。它用自己的一组粒子表示每个波峰，允许波反射以及与动态对象的相互作用。算法实现，并行化和控制也很简单。但是，在模拟长波列或高频波时，每波峰一个粒子的方法可能会很昂贵同样，此方法很难模拟波色散，因为它为问题增加了新的维度（每个波峰和每个波长一个粒子）。该方法还令人难以置信地以相速度而不是群速度传输波能量。最后，尽管随后的论文[Yuksel 2010]为如何将方法扩展到这些目标提供了有用的见识，但该方法并未解决如何处理诸如折射，衍射，色散或非平面边界反射的波效应。波粒方法激发了有关背景跟踪的后续工作[Cords 2008]，该方法的可控制性和速度使其成为模拟视频游戏中水的极佳选择[Gonzalez-Ochoa 2016]。

然而，人们选择模拟地表水波，其结果可用于许多不同的应用中。以前的研究人员已经将波浪用作边界条件或导向形状[Nielsen and Bridson 2011; SideFX 2013]或作为基于物理的程序纹理的一种类型[Chentanez和Müller2010]。波浪模拟参数也可以调整以获得理想的外观[Horvath 2015; Nielsen等人2013]。研究人员还将水面波模拟与完全三维模拟相结合[Kim等人2013; Mercier等人2015; Thuerey等人2010; 杨等人2016; Yu等人2012]。 我们在图2中展示了我们的方法如何增强一些现有的2D模拟。

2.2 物理文献

尽管拉格朗日波包对计算机图形学而言是新颖的，但将拉格朗日波包视为基本单元的想法在理论物理学中具有悠久的历史。它似乎起源于20世纪初期的理论量子力学研究的爆炸式增长。在这种情况下，波来自薛定谔方程[Birkhoff 1927]。由于波包的数学推导适用于任何色散方程，因此海洋学家从那时起就使用波包理论来解释水波能量的传输[Pedlosky 2013]。有人甚至提出将水波包命名为“hydron”，并赋予它与物理学中其他基本粒子（如光子和电子）相同的地位[Synge 1962]。尽管从理论上说，将水浪作为包是有用的，但据我们所知，我们还是第一种将波包用作数值模拟的基本方法的方法。

3 波动理论

3.1 艾里波动理论

艾里波动理论[Airy1841]将水面描述为随时间变化的高度函数。 我们可以使用此框架分析一组波的传播方式，然后使用这些理论结果来开发一种计算效率高的方法来模拟水面波。我们将首先分析一维情况，然后将其扩展到覆盖二维水面。

如果我们研究水面高度场的傅立叶变换，我们可以将水面视为多个不同波长的波的积分之和：

其中是波数, 与波长的关系为; 是空间坐标;为水深; 是角频率,与周期的关系为; 是每一个波的振幅; 是时间. 角频率具有特殊形式，可赋予水波独特性质：

其中是重力，是水面张力，是水密度.频率与波数之间的关系被称为*色散关系*(dispersion relation).从该关系中, 我们可以将公式的参数重构为,其中

是给定波长的传播速度,一般称为相速度(phase velocity).在2D空间中,波长为的水波在面积为A的水面上的能量是

波能以群速度(group velocity)运动,定义为

并且更多的讨论在附录A. 在一维度空间,和是标量.在二维空间，它们是向量和,并且我们使用标量作为波向量大小的简写.

直觉 如果考虑它们的极限行为，我们可以从本节的方程中提取一些良好的直觉。对于深水()中的重力波()，较长的波比较短的波传播得更快.我们倾向于在飞溅的外边缘看到长波，而短波则滞后.此外，相速度等于群速度的两倍，因此波峰实际上超出了其能量，并产生了波峰在飞溅的外边缘消失的效果.在中等水深处，随着深度的减小而减慢，而加快，直到它们最终在浅水()中变得相等时，所有波长以恒定速度传播.

对于毛细波()，几乎只发生在深水/高波数模式1中，短波长的传播比长波长的传播快.因此，以表面张力为主的小飞溅物在外边缘的波长较短.相速度仅是群速度的三分之二，因此能量超过波峰，从而在飞溅的外边缘产生了波化的波效果.所有这些定性作用都可以在我们的结果中看到.

3.2 波包(Wave packets)

在本文中，而不是使用无限长的波列进行计算[Mastin等人1987]或单波峰[Yuksel等人2007]，我们想传播局部波包.每个波包将代表相似波长的集合，并且它将覆盖比单个波峰更大的空间区域.这种策略将使我们能够用单个计算元素同时表示长波列，使波与动态变化的环境相互作用，并服从艾里波理论描述的定性行为.

在推导的这一点上，我们可以自由选择这些波包的外观.我们将列出一些所需的属性，以便稍后可以进行一些有根据的决策.首先，我们希望诸如边界，水深梯度和用户交互之类的环境变化会影响整个数据包.因此，每个波包应在空间坐标中得到紧凑的支持。另一方面，诸如能量之类的基本物理属性在频率空间中局部起作用，因此每个波包也应在波数坐标中得到紧凑的支持。因此，我们希望为波包提供一个在空间上局部起作用的核函数，其傅立叶变换也在波数上局部起作用.由于傅立叶变换的不确定性原理，没有函数在和上都可以真正地在拓扑上紧致[Phillips 2005]，但是许多函数通过对附近的值进行加权并按指数衰减来近似此行为.我们将使用高斯函数来表示波包内核，就像量子物理学之前许多工作一样[Liboff 2003].

现在，我们可以将公式(1)中的积分分解为以某个代表性波数为中心的单个波包的总和:

其中是我们波包的形状并且是波包的数量.如果函数是统一划分(a partition of unity.即，如果对所有),则该公式等于公式（1）.否则，如在我们的实现一样，右侧仅是近似值.

通过假设每一个波包内的频谱紧密围绕着它的代表性波长(即在远离时会迅速衰减),则我们可以通过一阶泰勒展开来近似和.经过一些分析(参考附录B),我们得到

该公式指出水面波可以由一组波包之和合理地近似，每个波包由一个核函数描述，该核函数以群速度传播，并充当以相速度传播的单个代表波的包络.每个波包具有在空间上变化的幅度，其中是与波包相关的空间恒定振幅比例因子.

如果允许速度和随时间变化,则应该使用积分形式和替换和,通过跟踪波包和波峰的路径建立了随时间变化的位移:

我们最终希望数据包是拉格朗日计算元素，因此我们更喜欢在数据包的局部坐标系中表示波动动力学:

其中是相速度和群速度之间随时间的积分.

在二维空间中,该公式一般化为

其中黑体表示二维空间向量. 注意，现在是大小为的波向量，而和是拥有方向和大小的速度向量.我们在图3中说明了这一求和项（单个波包）的一项.

3.3 量化波动行为

反射 波包在与障碍物碰撞时会反射.弹性碰撞将完美地保留能量并保持振幅不变，并且可以通过在碰撞后减小波包的振幅来模拟非弹性碰撞.

色散 波组中某些波的传播速度快于其他波，这是由于组速度作为的函数是不相同的. 因此，较快的波浪向前推动部分波包，而较慢的波浪拖拽部分波包.结果是波包在空间运动时与成比例的扩散.(这可以用类似于附录B的推导来表示，该推导保持的高阶项[Liboff 2003;Vandegrift 2004].)最终，这种扩散在行进方向上拉伸了我们的波包，因此，能量守恒要求波包的振幅必须相应降低.

折射 波包的群速度可能会随着其穿越空间而改变，因为随水深而变化,并且水深会随空间而变化.在这种情况下,小包会改变方向（折射）,其方式与斯涅尔定律[Breeding 1978]一致.

衍射 单个波绕障碍物弯曲，因此波包将以相同方式衍射.由于波的衍射取决于波数，因此我们认为波包应沿切线方向扩展.我们还没有计算出理论上的衍射扩散行为,也没有在文献中找到它,但是我们知道扩散和振幅受到能量守恒的限制.

3.4 波包的能量

当波包在空间中传播时,我们想加强能量守恒.公式(4)中的能量在幅度和波数上是平方的，并且在面积上是线性的，因此增加波数或拉伸包将相应地增加其能量.如果我们希望保持能量不变，则应该更改波包幅度以补偿这种变化.我们在附录C中计算了具有高斯核的数据包的精确幅度缩放定律.

在两个空间维度上,波不仅来回运动,而且还可以散开.例如,雨滴可能从波浪能量的紧圈开始,但是随着波浪向外传播,周长增加,能量守恒要求幅度必须随着每个包的扩展而减小.

实际上,波包会由于多种因素而损失能量.除了上一节中描述的非弹性碰撞之外,我们还考虑了由于粘度,表面污染和更复杂的非线性行为而导致的能量消散.

3.4.1 黏度 通常根据粘性势流理论[Padrino and Joseph 2007],通过显着降低波幅来模拟粘度.在没有其他幅度变化的情况下,幅度将随时间衰减:

尽管水的粘度ν很小(约),但振幅呈指数下降.对的依赖意味着小波数（长波）基本上忽略了粘度，而大波数几乎立即被其衰减.

3.4.2 表面污染 除粘度外,细微的表面污染物(污垢、藻类、油等)还将对水波产生强烈的阻尼作用.可以将这种效应建模为额外的衰减率[Dorrestein 1951; LeMéhauté1988].

3.4.3非线性和碎波 最后,由于艾里波理论假设小振幅()无法准确地对陡波建模,尤其是当波浪破裂并倾覆时发生的能量耗散.Dean和Dalrymple [1991]将陡度定义为波浪高度与波长的比值，观察到深水中的波浪一旦振幅超过其波长的7％陡度阈值便会破裂，从而在此过程中耗散了能量.估算这种类型的耗散的一种简单方法是减小波包的幅度，直到.

4 实现

既然我们已经解释了水波包的理论行为,我们将解释如何将其实现为模拟详细水波行为的有效算法.我们完全独立地对每个波包建模,因此可以并行计算它们.

4.1 波包的表达

每个波包具有代表性波数和振幅.我们用矩形尺寸对空间范围和变形建模，矩形尺寸在行进方向上的初始尺寸为，在切线方向上的初始尺寸为.我们没有使用单个粒子随时间跟踪波包的位置，而是使用了两个波包前边缘为中心的顶点和.这两个顶点使我们能够跟踪包的变形和旋转，这对于模拟适当的能量行为以及复杂环境中的折射和反射非常重要.随着波的聚集和扩散，两个顶点之间的距离将随时间变化，因此它们之间的距离不会保持固定.但是，如果波包相距太远，则将其细分(第4.3节).为了对波包在频率空间中的范围进行建模,我们为每个波包分配了一个波数范围(从到,).

一旦有了初始数据包,就可以对其动态建模.从初始行进方向开始,两个顶点以组速度传播.我们使用简单的前向Euler方法将时间上的顶点位置进行积分.

更高级的时间积分方案可能对于准确解决反射和折射角可能有用,但是它们不会使该方法更加稳定.由于采用了能量守恒的的几何方法(请参见第4.2节),因此无论时间步长如何,我们的方法都是稳定的.

我们还通过跟踪波包频谱中最快和最慢的波数，检查它们之间的游离程度，来对色散进行建模.我们为每个波包分配一个长度参数，该参数初始设置为，并使用类似的积分法则跟踪色散拉伸：

其中和分别是波组内最大和最小组速度对应的波数,并且是向量的大小.便利地，直接取决于：它单调递减直到，然后单调递增.因此，只要我们不创建任何跨过的数据包，我们就始终可以假设波包范围内的最小和最大波长是最快和最慢的.如果创建了一个跨度最慢的波包，那么我们将执行色散细分程序（第4.3节），并以最慢的速度精确地分割频谱.具体来说，我们创建了两个新波包，一个波包的部分频谱高于，另一部分的频谱小于，然后删除了原始波包.

通过确保每个波组始终满足色散关系(2)，我们还可以根据其环境更改每个波包的代表波长.这种限制为我们的模拟算法提供了一种显示波浪浅滩的机制，即当波浪进入浅水时变慢并减小其波长.为此，我们首先为每个波包保持固定的角频率.然后，在每个时间步长，我们通过重复直到收敛来求解，如Jeschke和Wojtan [2015]所建议的.由于该方案以接近的初始猜测开始，因此它在极少的迭代中收敛.我们相信可以通过查找表来优化此函数，但目前还不是瓶颈.

最后,公式(10)要求计算每个波包相速度和组速度之间的游离积分，.我们再次采用前向Euler集成：

4.2 振幅调整

3.4节和附录C中描述的能量缩放定律适用于无内部边界的无限域中的高斯波包，我们使用它来近似更复杂的域。(假设反射会使波包的峰值保持在固体边界之外，则不准确度仅会出现在高斯ϕ函数的尾部，因此总能量误差将呈指数级减小.) 我们首先计算每个时间步内波包的面积:

然后，我们按照附录C中所述通过缩放振幅来使能量守恒:

其中我们临时的引入符号和.为了方便,我们的实现会删除那些陡度低于极小阈值的波包.

我们发现这种能量守恒的方案在实践中对很有用.它的有效性与时间步长和数据包形状等数字参数无关，这与通过离散化微分方程（这是一种离散的守恒定律，而不是离散的守恒律）得出的方案不同.我们的方案还为我们提供了系统中总波能的硬上限，我们在附录D中指出波包的速度也受限制.这些界限以及每个波包中的能量只能保持不变或消散的事实，确保了不会发生数值爆炸。除这些优势之外，这种无条件的数值稳定性允许我们的波以任意高的速度传播，而没有时间步长的限制或artifact阻尼.这种行为特别不同于欧拉方法，后者对毛细管波施加严格的CFL条件.

极端的数值积分错误（来自等式（13）），例如由于时间步长过大而错过碰撞，仍然会能量守恒，尽管它们可能会生成面积较大且振幅较小的数据包。线性叠加原理可防止此类错误数据包影响其他数据包。

4.3 波包细分

当波包变形超过阈值时，我们选择将其细分为两个。我们可以将其视为一种自适应细化策略，以保持对波包进行充分采样的空间。我们根据细分是几何变形（切向拉伸）还是色散（行进方向拉伸）来区分细分。

4.3.1 几何细分 如果波包顶点之间的距离超过，或者群速度和之间的夹角超过18度，我们选择细分波包.无论哪种情况，我们都通过在位置处添加一个新的顶点，用两个新的波包替换，并为其中一个新波包设置，为另一个设置.因为每个新波包的面积均为原始波包的一半，所以每个新波包的能量均为原始波包的一半（每个新振幅等于原振幅除以）.在细分过程中，所有其他参数保持不变.请参见图4对此过程进行说明.

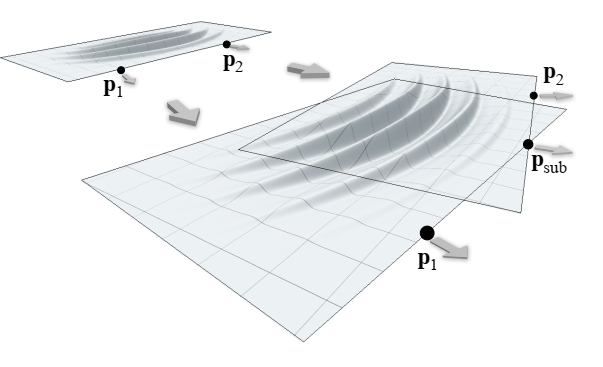
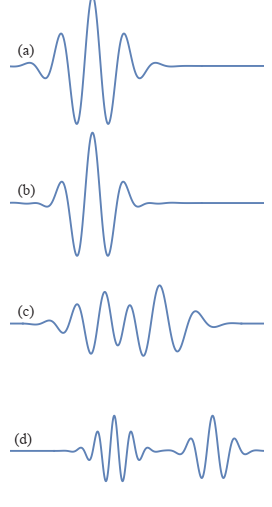


图4. 在由切向拉伸引起的细分中，我们细分边缘并将新的边缘和分布到两个新数据包中.该图显示了细分之后的结果;这两个新波包已经分开，新的线段不再共线.

4.3.2 色散细分 由于过度分散，我们同样也细分波包，创建了两个新波包，并为它们分配波包的频谱.当波包长度超出阈值时（在我们的实现中,,其中是原始波包长度），我们用两个具有相同位置和其他波包参数的新波包替换当前波包.然后，引入中间范围的波数,并为一个新波包设置，为另一个新波包设置，使用这种方法将频谱分配给新波包.然后，将每个新波包的代表波数设置为.两个新波包之间的能量分布取决于原始波包的频谱(为原始波包中的无限多个波数分配了多少能量）.我们的实现只是选择新的幅度，以保持能量守恒,并且两个新波包都具有相同的陡度，这意味着原始频谱在较低波数下存储了更多能量.新振幅的精确值在附录E中显示。为了说明累积的波包到这一点的扩散，我们对每个波包进行重置.我们在插图中提供了此色散细分的一维插图.在此，初始波包(a)被分成具有不同波谱(b)的两个波包的总和.然后，新波包由于分散(c)，(d)而游离开.(d)中波包之间的距离被夸大了；我们的实现将进一步细分波包，然后再将其分开.

4.4 量化波行为

第3.3节中描述的量化波行为我们在这里重复一下再增加一些额外内容。

*反射* 当波包顶点与固体障碍物碰撞时，每个波包的顶点反射类似从反射面反射的光线[Whitted 1980]，特别是遵循Jeschke和Wojtan [2015]描述的反射线段的规则。但是，由于波包具有有限的空间范围（在两个数据包顶点后面的小波），波包中一次反射的所有波峰会造成视觉上的干扰。取而代之的是，我们通过创建一个虚拟波包不断反射波峰，该虚拟波包将跟随原始波包在反射之前的轨迹，直到被完全吸收到障碍物中。

色散 如前一节所述，当波包由于内部色散而扩散时，我们将其细分。这些细分事件会创建具有不同代表波数的波包。因为这些新波包中的每一个将具有不同的组速度，所以自然会产生具有不同波长的波以不同速度传播的效果。

折射 每个波包顶点在传播时也会折射。我们计算每个顶点在每个时间步的开始和结束时的群速度，然后根据斯涅尔定律计算行进方向的变化。这个过程与先前的波前跟踪工作[Gamito and Musgrave 2002; Gonzato和LeSaëc，1997； Jeschke和Wojtan，2015;T’so and Barsky 1987]相似。我们的实现使小波与包的传播方向保持一致，从而有效地将包络和小波折射在一起。一种更准确的方法可以独立折射包络和小波，但是我们发现微妙的视觉差异不值得额外的计算开销和数值游离风险.

衍射 我们以与Jeschke和Wojtan [2015]相同的方式实施衍射：如果小包的一个顶点以掠射角与实心边界碰撞，则我们可以通过限制其运动与切线成正切来将其“粘合”到边界。这是使波绕障碍物衍射所需的全部操作。高度弯曲的边界也会拉长数据包，导致快速的几何数据包细分（第4.3节）和振幅的预期指数下降[Levy and Keller 1959]。 但是，这种衍射近似不包括波长依赖性。更精确的衍射需要进一步研究。

耗散 通过在每个时间步中对这些衰减率进行分析积分，我们在第3.4节中包括了耗散效应：

其中是时间步长,是控制参数将在5.3节介绍.